

BOLÉTSIN 1-1

3. Construye las tablas de verdad para cada una de las siguientes proposiciones.

(a) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

a) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

p	q	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

4. Simplifica las siguientes proposiciones.

(a) $\neg(p \wedge \neg q)$

(b) $\neg(\neg p \vee \neg q)$

(c) $\neg(\neg p \vee q)$

(d) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

a) $\neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee q$

b) $\neg(\neg p \vee \neg q) \equiv p \wedge q$

c) $\neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

d) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv p \vee q$

5. Simplifica los siguientes enunciados.

(a) No es verdad que su madre ^p es inglesa o su padre ^q francés.

(b) No es verdad que estudia física pero no matemáticas.

(c) No es verdad que no hace frío o está lloviendo.

a) $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$

b) $\neg(r \wedge \neg s) \Rightarrow \neg r \vee s$

c) $\neg(\neg t \vee u) \Rightarrow t \wedge \neg u$

6. Escriba la negación de las proposiciones siguientes y simplifíquelas.

(a) $(\neg p \vee q) \wedge r$

(b) $p \vee (q \wedge \neg r)$

a) $\neg((\neg p \vee q) \wedge r) \Rightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r$

b) $\neg(p \vee (q \wedge \neg r)) \Rightarrow \neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \Rightarrow \neg p \wedge (\neg q \vee r)$

7. Escriba la negación de los siguientes enunciados.

(a) $\neg(\overset{p}{\text{El es rubio}} \wedge \overset{q}{\text{tiene los ojos azules}}) \equiv \neg p \vee \neg q$

(b) $\neg(\text{Ella no es ni rica ni feliz}) \equiv r \vee s$

(c) $\neg(\text{Ha perdido su trabajo o no ha ido a trabajar}) \equiv t \wedge u$

8. Obtenga el Recíproco y el Contrarrecíproco de cada una de las siguientes implicaciones.

(a) Si nieva hoy, esquiaré mañana.

(b) Voy a clases siempre que vaya a haber un examen.

(c) Un entero positivo es primo si, y sólo si, no tiene otros divisores más que 1 y él mismo.

a) R: Si esquivó mañana, nieva hoy CR: Si no esquivó mañana, no nieva hoy

b) R: Siempre que voy a clases, hay examen CR: Siempre que no voy a clases, no hay examen

9. Sean p y q dos proposiciones. La *disyunción exclusiva* de p y q , denotada por $p \vee q$, es la proposición " p o q , pero no ambas".

(a) Construya la tabla de verdad para $p \vee q$.

(b) Demuestra que $p \vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

a)

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

b)

p	q	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

10. Demuestra, sin usar tablas de verdad, que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ y $\neg p \wedge \neg q$ son lógicamente equivalentes.

$$\begin{aligned} \neg p \wedge (\neg p \vee \neg q) &\equiv (\neg p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \boxed{\neg p \wedge \neg q} \\ &\quad \downarrow \\ &\text{Siempre F} \end{aligned}$$

12. Demuestra, sin usar tablas de verdad, que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) = V$$

BOLETIN 1-2

1. Niegue cada uno de los siguientes enunciados.

- (a) Si el profesor está ausente, entonces algunos estudiantes no acaban su tarea. $\neg p \rightarrow \neg q \equiv \neg \neg p \vee \neg q$
- (b) Todos los estudiantes acaban su tarea y el profesor está presente. $q \wedge p$
- (c) Algunos estudiantes no acabaron su tarea o el profesor está ausente. $(\neg p \vee \neg q)$

- a) El profesor está ausente y los estudiantes acabaron su tarea
- b) Todos los estudiantes no acabaron su tarea o el profesor está ausente
- c) Todos los estudiantes acabaron la tarea y el profesor está presente

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine el valor de verdad y niegue cada uno de los siguientes enunciados.

- (a) $\exists x \in A (x + 3 = 10)$ (b) $\forall x \in A (x + 3 < 10)$
- (c) $\exists x \in A (x + 3 < 5)$ (d) $\forall x \in A (x + 3 \leq 7)$

- a) Para la proposición dada y con el dominio de discurso A , no hay ningún valor de x que satisfaga dicha proposición.

$$\exists x P(x) = P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5)$$

4 5 6 7 8

Falsa
Si $x=7$ estuviera en el dominio, sería verdadera

- b) Para la proposición dada y con el dominio de discurso A , hay un valor de x , $x=1$ que hace verdadera dicha $P(x)$

$$\exists x P(x) = P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5) \rightarrow \text{Verdadera}$$

4 5 6 7 8

- c) Para la proposición dada y con el dominio de discurso A , no hay un valor de x que haga Falsa la proposición, por tanto:

$$\forall x P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5) \rightarrow \text{Verdadera}$$

4 5 6 7 8

3. Traduce las siguientes proposiciones al lenguaje natural, sabiendo que $C(x)$ es " x es un cómico", $F(x)$ es " x es divertido" y el dominio es el conjunto formado por todas las personas.

- (a) $\forall x (C(x) \rightarrow F(x))$ (b) $\forall x (C(x) \wedge F(x))$
- (c) $\exists x (C(x) \rightarrow F(x))$ (d) $\exists x (C(x) \wedge F(x))$

- a) Todo sujeto x que es cómico, es divertido.
- b) Todo sujeto x es cómico y es divertido
- c) Al menos, existe un sujeto x que si es cómico, es divertido.
- d) Al menos, existe un sujeto x que es cómico y es divertido

4. Traduce cada una de las siguientes frases a expresiones lógicas utilizando funciones proposicionales y cuantificadores. En primer lugar, considere que el dominio es el conjunto formado por los estudiantes de tu clase; y en segundo lugar, considere que el dominio es el conjunto formado por todas las personas.

(a) Todos en tu clase son amigables.

(b) Hay una persona en tu clase que no nació en Córdoba.

(c) Un estudiante de tu clase ha visto una película.

(d) Ningún estudiante de tu clase ha cursado la asignatura de Matemática Discreta.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \forall x, A(x) & \text{b)} \exists x, \neg N(x) & \text{c)} \exists x, P(x) & \text{d)} \forall x, \neg M(x) \\ \forall x, (E(x) \rightarrow A(x)) & \exists x, (E(x) \wedge \neg N(x)) & \exists x, (E(x) \wedge P(x)) & \forall x, (E(x) \rightarrow \neg M(x)) \end{array}$$

5. Traduce al lenguaje natural, conociendo que $F(p)$ es “La impresora p está fuera de servicio”, $B(p)$ es “La impresora p está ocupada”, $L(j)$ es “El trabajo de impresión j se ha perdido” y $Q(j)$ es “El trabajo de impresión j está en cola”.

(a) $\exists p (F(p) \wedge B(p)) \rightarrow \exists j L(j)$.

(b) $\forall p B(p) \rightarrow \exists j Q(j)$.

(c) $\exists j (Q(j) \wedge L(j)) \rightarrow \exists p F(p)$.

(d) $(\forall p B(p) \wedge \forall j Q(j)) \rightarrow \exists j L(j)$.

- a) Si, al menos, una impresora p está fuera de servicio y ocupada, entonces, al menos un trabajo de impresión j se ha perdido.
- b) Si todas las impresoras p están ocupadas, entonces, hay al menos un trabajo de impresión en cola.
- c) Si, al menos, hay un trabajo de impresión en cola y perdido, entonces, hay una impresora fuera de servicio.
- d) Si todas las impresoras están ocupadas y todos los trabajos de impresión están en cola, entonces, hay al menos un trabajo de impresión perdido.

6. Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ las afirmaciones “ x es un profesor”, “ x es alto” y “ x es fuerte”, respectivamente. Expresa cada una de las siguientes oraciones como expresiones lógicas utilizando funciones proposicionales y cuantificadores, considerando al dominio como el conjunto formado por todas las personas.

(a) No hay profesores altos. $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

(b) Toda la gente alta es fuerte. $\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))$

(c) No hay profesores fuertes. $\forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$

7. Para cada uno de los siguientes argumentos, determina si son correctos o incorrectos y explica por qué.

$$\forall x (E(x) \rightarrow L(x))$$

(a) Todos los estudiantes de la clase entienden lógica. Carlos es un estudiante de la clase. Por tanto, Carlos entiende lógica. $\forall x (E(x) \rightarrow L(x))$

(b) Todos los estudiantes de Ingeniería Informática cursan la asignatura de Matemática Discreta. Carlos cursa Matemática Discreta. Por tanto, Carlos es estudiante de Ingeniería Informática. F , Falacia que $M(a) \rightarrow E(a)$

(c) Los que comen vegetales todos los días están sanos. Carlos no está sano. Por tanto, Carlos no come vegetales todos los días. $\forall x, \neg S(x) \rightarrow \neg V(x)$

Carlos = a

$$\forall x (E(x) \rightarrow M(x))$$

$$\forall x (V(x) \rightarrow S(x))$$

8. Determina si es correcto cada uno de los siguientes argumentos. Si el argumento es correcto, ¿cuál es la regla de inferencia utilizada? Si no lo es, ¿qué error lógico ocurre?

- (a) Si n es un número real tal que $\frac{n > 1}{p}$, entonces $\frac{n^2 > 1}{p}$. Supongamos que $\frac{n^2 > 1}{p}$.
Entonces, $\frac{n > 1}{p}$.
- (b) Si n es un número real tal que $n > 3$, entonces $n^2 > 9$. Supongamos que $n^2 \leq 9$.
Entonces, $n \leq 3$.
- (c) Si n es un número real tal que $n > 2$, entonces $n^2 > 4$. Supongamos que $n \leq 2$.
Entonces, $n^2 \leq 4$.

Asume que $q \rightarrow p$

Modus Tollens

Asume que si $\neg p$,
entonces $\neg q$

9. Demuestra que si n es un entero y $n^3 + 5$ es impar, entonces n es par, a través de

- (a) una demostración usando el contrarrecíproco.
(b) una demostración por reducción al absurdo.

Si $\begin{cases} n \text{ entero} \\ n^3 + 5 \text{ impar} \end{cases}$, entonces n es par

$$n \text{ entero} \equiv n \in \mathbb{Z} \quad n^3 + 5 = a$$

$$n = 2k$$

a) Si n es impar, $n^3 + 5$ es par

Proof: con $n \in \mathbb{Z}$, tal $\times$ que $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$n^3 + 5 = (2k + 1)^3 + 5 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 6 = 2 \cdot (4k^3 + 6k^2 + 3k + 3) = 2 \cdot \text{entero}$$

$\rightarrow$ esto siempre será par, por tanto, siempre que n sea impar $n^3 + 5$ será par. Es decir, si $n^3 + 5$ es impar, n será par

b) Supongamos que si $n^3 + 5$ es impar, n sea impar.

Proof: con $n \in \mathbb{Z}$, tal que $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

$$n^3 = (2k + 1)^3; \quad n^3 + 5 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 6 = 2 \cdot \text{entero}$$

Según esta afirmación, $n^3 + 5$ será par cuando n sea impar, información que contradice nuestra hipótesis,

12. Demuestra que las siguientes tres condiciones son equivalentes.

- (i) $3x + 2$ es un número par.
- (ii) $x + 5$ es un número impar.
- (iii) x^2 es un número par.

i) $\rightarrow$ ii) Si $3x+2$ es par, entonces $x+5$ es impar

Asumimos (i) verdadera implica que $3x$ es par. Como consecuencia x es par.

Por tanto $x+5$ es impar.

ii) $\rightarrow$ iii) Asumimos que ii) es verdad. Como 5 es impar. Entonces x es par. Por tanto x^2 es par.

iii) $\rightarrow$ i) Finalmente suponemos que (iii) se cumple. Si $3x+2$ es impar, entonces $3x$ es impar y como asumimos x es impar

Boletín 2-1

1. Sea A el conjunto formado por los estudiantes que viven a 2 km de la facultad y sea B el conjunto formado por los estudiantes que van andando a clases. Describa cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cap B$

(b) $A \cup B$

(c) $A \setminus B$

(d) $B \setminus A$

a 2 km pero no andan

andan pero no a 2 km

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0, 3, 6\}$. Calcula cada uno de los siguientes conjuntos

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A \setminus B$

(d) $B \setminus A$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\{3\}$

$\{1, 2, 4, 5\}$

$\{0, 6\}$

3. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) $\{x\} \subseteq \{x\} \quad \checkmark$

(b) $\{x\} \in \{x\} \quad \text{F}$

(c) $\{x\} \in \{x, \{x\}\} \quad \checkmark$

(d) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\} \quad \checkmark$

4. Calcula $\mathcal{P}(\{a, \{b\}\})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

$\mathcal{P}(\{a, \{b\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a, \{b\}\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

5. Sea A un conjunto. Demuestra que $(A^c)^c = A$.

Proof: $(A^c)^c = \{x: x \notin A^c\} = \{x: x \in A\} = A$

6. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A \cap (A \cup B) = A$.

$x \in A$ y $x \in A \cup B$. $A \cap A \cup B$ es los elementos que hay en A que tambien hay en la unión. Por tanto, $x \in A \cap (A \cup B)$. $A \subseteq A \cap A \cup B$

Finalmente, $x \in A \cap (A \cup B)$. Por tanto $x \in A$ y $x \in (A \cup B)$. Entonces

$A \cap (A \cup B) \subseteq A$ Como consecuencia $A = A \cap (A \cup B)$

7. ¿Qué podemos decir de los conjuntos A y B si

- (a) $A \cup B = A$? $B \subseteq A$ (b) $A \cap B = A$? $A \subseteq B$ (c) $A \setminus B = A$? $A \cap B = \emptyset$
 (d) $A \cap B = B \cap A$? $\forall$ siempre (e) $A \setminus B = B \setminus A$? Imposible $x \in A \setminus B \rightarrow x \in A$ $x \in B \setminus A \rightarrow x \in B$ Por tanto, no difiere

8. Sean A y B subconjuntos del conjunto universal U . Demuestra que $A \subseteq B$ si, y sólo si, $B^c \subseteq A^c$.
 9. Sean A , B y C conjuntos. Demuestra que:
 (a) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 (b) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.
 10. Sean A , B y C conjuntos. Demuestra que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C^c$, entonces $A \cap C = \emptyset$.
 11. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra, usando el método por reducción al absurdo, que $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.
 12. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra, usando "doble inclusión", que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Boletín 2-2

1. Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq B$. Demuestra que $|A \cup B| = |B|$ y $|A \cap B| = |A|$.

Si $A \subseteq B$, eso quiere decir que los elementos pertenecientes a A , también pertenecen a B . Por tanto, $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$

Por consecuencia: $|A \cup B| = |B|$ $|A \cap B| = |A|$

2. Sean A_1 , A_2 y A_3 tres conjuntos tales que $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 100$. Calcula $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ si

- (a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i < j$.
 (b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ y $|A_i \cap A_j| = 50$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i < j$.
 (c) $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 25$ y $|A_i \cap A_j| = 50$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i < j$.
 (d) $A_1 = A_2 = A_3$.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

a) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 100 + 100 + 100 - 0 - 0 - 0 + 0 = 300$

b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 100 + 100 + 100 - 50 - 50 - 50 + 0 = 150$

c) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 100 + 100 + 100 - 50 - 50 - 50 + 25 = 175$

d) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 100 + 100 + 100 - 100 - 100 - 100 + 100 = 100$

3. Una encuesta realizada en los hogares de España muestra que el 96% tiene al menos un televisor, el 98% tiene teléfono y el 95% tiene teléfono y al menos un televisor. ¿Qué porcentaje de los hogares de España no tiene ni teléfono ni televisor?

$$|U| = 100$$

personas con 1 TV = T

$$|T| = 96 \quad |P| = 98$$

personas con teléfono = P

$$|T \cap P| = 95$$

$$|T \cup P| = 96 + 98 - 95 = 99 \rightarrow 99\% \text{ tienen ambos, } 1\% \text{ no tienen nada.}$$

4. Determina el número de enteros positivos menores o iguales que 100 que son impares o el cuadrado de un número entero.

$$\text{Conjunto impares } < 100 = I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 99\} \rightarrow |I| = 50$$

$$\text{Conjunto cuadrado n° entero } < 100 = C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\} \\ |C| = 10$$

$$I \cap C = \{1, 9, 25, 49, 81\} \rightarrow |I \cap C| = 5$$

$$|I \cup C| = 50 + 10 - 5 = 55$$

5. ¿Cuántos enteros positivos menores o iguales que 1000 son divisibles por 7 o por 11 < 1000

D_7

D_{11}

$$D_7 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, \dots, 994\} \rightarrow |D_7| = \frac{1000}{7} = 142$$

$$D_{11} = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, \dots, 990\} \rightarrow |D_{11}| = \frac{1000}{11} = 90$$

$$|D_7 \cap D_{11}| = D_{77} = \{77, 154, \dots, 924\} \rightarrow |D_{77}| = \frac{1000}{77} = 12$$

↳ Divisibles entre 77

$$|D_7 \cup D_{11}| = 142 + 90 - 12 = 220$$

6. A un curso de Matemática Discreta asisten solamente estudiantes que cursan las carreras de Informática y Matemáticas. Es conocido que hay 25 estudiantes de Informática, 13 estudiantes de Matemáticas y 8 estudiantes que cursan las dos carreras. ¿Cuántos estudiantes asisten al curso?

$$\begin{aligned} \text{Alumnos Informática} &= I & |I| &= 25 & |M| &= 13 & |I \cap M| &= 8 \\ \text{Alumnos Matemáticas} &= M & |I \cup M| &= 25 + 13 - 8 = 30 \end{aligned}$$

7. En una Universidad hay 1807 estudiantes cursando el primer año. De ellos, 453 están matriculados en Informática, 567 están matriculados en Matemáticas y 299 están matriculados en ambas carreras. ¿Cuántos estudiantes cursando el primer año no estudian ni Matemáticas ni Informática?

$$\begin{aligned} \text{Alumnos 1º Informática} &= I & |I| &= 453 & |M| &= 567 & |I \cap M| &= 299 \\ \text{Alumnos 1º Matemáticas} &= M & |I \cup M \cup N| &= 1807 & |I \cap N| &= 0 & |M \cap N| &= 0 \\ \text{Alumno no curso superiores} &= N & |I \cap N \cap M| &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I \cup M \cup N| &= |I| + |M| + |N| - |I \cap M| - |I \cap N| - |M \cap N| + |I \cap N \cap M| \\ 1807 &= 453 + 567 + |N| - 299 - 0 - 0 + 0; \quad |N| = 1086 \end{aligned}$$

• BOLETIN 2-3

1. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$. $\sum_{i=1}^n 2n-1 = n^2$

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(d) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

a) **Proof:** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ una afirmación matemática tal que $P(n) : \sum_{i=1}^n 2n-1 = n^2$.

Observa que $P(1) : 2(1)-1 = 1^2$ es verdadera. Este caso particular establece el paso base. $P(k)$ es verdadero

Observa que $\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + (2(k+1)-1)$ Por la hipótesis de inducción se deduce que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + (2k-1) = k^2 + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

En particular, se cumple que $\sum_{i=1}^{k+1} i = k^2 + 2k + 1$, lo que es equivalente a $P(k+1)$ es verdadera y, por tanto, $P(n)$ es verdadera

b) **Proof:** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ una afirmación matemática tal que $P(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Observa que $P(1) : 1^2 = \frac{1 \cdot (2) \cdot (3)}{6}$ es verdadera. Este caso particular establece el paso base. $P(k)$ es verdadero

Observa que $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2$ Por la hipótesis de inducción se deduce que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k^2 + 2k + 1) \\ &= \dots = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6} \end{aligned}$$

En particular, se cumple que $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \dots$, lo que es equivalente a $P(k+1)$ es verdadera y, por tanto, $P(n)$ es verdadera

c) Proof: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ una afirmación matemática tal que
 $P(n) : \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Observa que $P(1) : 1^3 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$ es verdadera. Este caso particular establece el paso base.

Observa que $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3$ Por la hipótesis de inducción ^{$P(k)$ es verdadera}
 se deduce que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4(k+1))}{4} \\ &= \dots = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

En particular, se cumple que $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \dots$, lo que es equivalente a $P(k+1)$ es verdadera y, por tanto, $P(n)$ es verdadera.

d) Proof: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ una afirmación matemática tal que
 $P(n) : \sum_{i=1}^n i \cdot (i+2) = \frac{n(n+1)(n+3)}{6}$

Observa que $P(1) : 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ es verdadera. Este caso particular establece el paso base.

Observa que $\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot (i+2) = \sum_{i=1}^k i \cdot (i+2) + (k+1) \cdot (k+3)$ Por la hipótesis de inducción ^{$P(k)$ es verdadera}
 se deduce que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot (i+2) &= \sum_{i=1}^k i \cdot (i+2) + (k+1) \cdot (k+3) = \frac{k(k+1)(k+3)}{6} + (k+1) \cdot (k+3) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+3) + 6k^2 + 4k + 3}{6} = \frac{2k^3 + 15k^2 + 17k + 3}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+2+3)}{6} \end{aligned}$$

En particular, se cumple que $\dots$, lo que es equivalente a $P(k+1)$ es verdadera y, por tanto, $P(n)$ es verdadera.

2. Sean $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 2)$ conjuntos en algún conjunto universal U . Demuestra que

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c.$$

Proof: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ una afirmación matemática tal que $P(n): (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c =$

a) Observa que $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$ es verdad (Doble inclusión: $x \in (A_1 \cap A_2)^c$; $x \notin A_1 \cap A_2$; $x \notin A_1$ y $x \notin A_2$; $x \in A_1^c$ y $x \in A_2^c$; $x \in A_1^c \cup A_2^c$; $x \in A_1^c$ y $x \in A_2^c$; $x \notin A_1$ y $x \notin A_2 \dots$)

Este caso en particular establece el paso base.
111

b) Observa que

Boletín 3-1

1. En cierta universidad hay 18 estudiantes de Matemáticas y 325 estudiantes de Informática.

- (a) ¿De cuántas formas se pueden escoger dos representantes, si es necesario que uno de ellos sea un estudiante de Matemáticas y el otro sea estudiante de Informática?
- (b) ¿De cuántas formas se puede escoger un representante que sea estudiante de Matemáticas o Informática?

a) $18 \cdot 325 = 5850$, ya que es independiente

b) $M = \text{Estudiantes de Matemáticas}$
 $I = \text{Estudiantes de Informática}$

$$|M \cup I| = |M| + |I| - |M \cap I| = 18 + 325 - 0 = 343$$

Sabemos que se enfrentan 1 contra 1, por tanto, serán partidos de 2 tenistas cada uno, por lo que habrá 32 partidos en la 1ª ronda. En la siguiente, el formato será igual, por lo que $\frac{32}{2} = 16$ partidos. Así, hasta llegar a la final (1 partido). Por tanto:

$$2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 63 \text{ partidos en total}$$

3. ¿Cuántos números de 10 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 5 y 9 que contengan al menos ~~un~~ un 5 y un 9?

$$N^{\circ} \text{ posibles} = VR_{3,10} = 3^{10}$$

$$N^{\circ} \text{ sin } 1 = VR_{2,10} = 2^{10} = N^{\circ} \text{ sin } 5 = N^{\circ} \text{ sin } 9$$

$$N^{\circ} \text{ sin } 1 \text{ o } 5 = 1 = N^{\circ} \text{ sin } 1 \text{ o } 9 = N^{\circ} \text{ sin } 5 \text{ o } 9$$

$$\text{Total posibles} = 3^{10} - 3 \cdot 2^{10} - 3 \cdot 1 =$$

4. ¿De cuántas formas puede un fotógrafo de bodas ordenar un grupo de 6 personas si

- (a) los novios deben salir juntos en la foto?
- (b) los novios no pueden salir juntos en la foto?
- (c) la novia debe salir en algún puesto a la izquierda del novio?

a) $V_{5,5} \cdot 2 = 5! \cdot 2 = 240$

↓
(Novio, Novia)
(Novia, Novio)

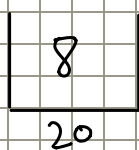
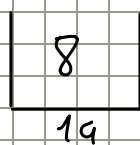
b) En este caso será:

$$6! - 240 = 720 - 240 = 480$$

c) Será: $720/2 = 360$.

5. Supongamos que hay una clase de 25 estudiantes en la que todos tienen entre 18 y 20 años. Demuestra que hay al menos 9 estudiantes que tienen la misma edad.

Según el Principio de palomas:

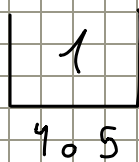
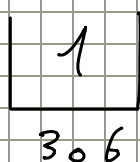
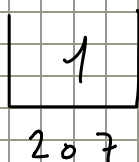
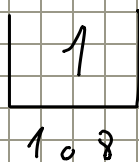


1 Al menos, un grupo
tendrá 9 integrantes

6. Supongamos que se escogen cinco enteros entre el 1 y el 8. Demuestra que la suma de alguna pareja debe ser 9.

Las parejas posibles: $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$ → 4 parejas

Si escoges 5 números, Forzadamente, Tienes que elegir uno de los dos números de una pareja



1

7. ¿Cuántos enteros se deben escoger del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para asegurar que al menos una pareja de ellos sume 7?

Nº parejas $\longrightarrow (1, 6), (2, 5), (3, 4) \longrightarrow 3$ parejas

$$n > m \cdot t \longrightarrow 6 > 3 \cdot t$$

Si pongo un elemento en cada caja ($t=1$), serán 3 elementos. Para que haya una caja donde haya dos, debo coger otro más.

8. ¿Cuántas permutaciones del conjunto formado por las letras A, B, C, D, E, F existen que contengan

(a) exactamente la cadena DEF ?

(b) las letras D, E, F juntas en cualquier orden?

a) Tomamos DEF como un elemento, así que $P_4 = 4! = 24$

b) $3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144$

↓
Combinaciones posibles del bloque DEF

• BOLETÍN 3-2

1. ¿Cuántas cadenas de diez bits contienen

- (a) exactamente cuatro unos?
- (b) como mucho cuatro unos?
- (c) al menos cuatro unos?
- (d) una cantidad igual de unos y ceros?

a) $C_{10,4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210$

b) Esto es la suma de los casos donde hay 0, 1, 2, 3 y 4 unos.

$$C_{10,0} + C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 = 386$$

c) $C_{10,10} + C_{10,9} + C_{10,8} + C_{10,7} + C_{10,6} + C_{10,5} + C_{10,4} = 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 848$

d) Para eso, habrá 5 unos y 5 ceros. $C_{10,5} = 252$

2. En un grupo hay n hombres y n mujeres. ¿De cuántas formas se pueden ordenar estas personas en una fila si los hombres y las mujeres se deben alternar?

Hay dos tipos de ordenarse, primero hombre o primera mujer. En cada uno de los casos, un hombre puede tomar n posiciones, al igual que las mujeres. Por tanto:

$$2 \cdot (n! \cdot n!)$$

3. Un grupo mediano en la asignatura de Matemática Discreta tiene 10 hombres y 15 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede formar un equipo de seis estudiantes si debe haber igual número de hombres que de mujeres?

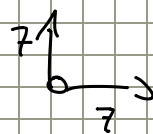
Para esto, debe haber 3 hombres y 3 mujeres en el grupo. Por tanto, habrá $C_{10,3} = 120$ combinaciones de hombres y $C_{15,3} = 260$ combinaciones de mujeres. Usamos el principio de multiplicación ya que en cada comb. hombres, se hacen las otras comb. mujeres (sec. secuenciales)

$$260 \cdot 120 = 54600$$

4. En la casilla inferior izquierda de un tablero de ajedrez situamos un rey con la intención de ir moviéndolo hasta que alcance la casilla superior derecha. Si los únicos movimientos permitidos son moverse una casilla hacia la derecha o una casilla hacia arriba, ¿cuántos son los caminos distintos que el rey puede hacer hasta llegar a la casilla superior derecha?

$$2 \times 8$$

Tenemos que hacer un total de 7 movimientos hacia arriba y 7 hacia la derecha para llegar a esa posición (14)



Por tanto, deberíamos calcular las combinaciones que tienen de avanzar 7 casillas arriba entre 14 movimientos, siendo los otros 7 movs. para a la derecha.

$$C_{14,7} = 3432$$

5. Un club está formado por 25 personas.

- (a) ¿De cuántas formas se pueden escoger cuatro personas para formar un comité ejecutivo?
(b) ¿Cuántas formas hay para escoger presidente, vicepresidente, secretario y tesorero del club?

$$a) C_{25,4} = 12650$$

$$b) V_{25,4} = 303600$$

6. Con cuatro ceros y seis unos, ¿cuántos números de ocho cifras binarias se pueden formar?

Vamos a ver los casos:

$$C_{8,2} + C_{8,3} + C_{8,4} =$$

2 ceros	3 ceros	4 ceros
6 unos	5 unos	4 unos

7. Se rellena una quiniela de 14 partidos (en cada partido marcamos una, y sólo una, de las tres posibilidades: 1, X, 2). ¿Cuántas maneras hay de acertar el resultado de exactamente 9 de los 14 partidos?

La combinación de acertar 9 partidos de 14 es

$$C_{14,9} = \frac{14!}{9! \cdot 5!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 2002$$

8. Un sistema de señales permite emitir ceros, unos y espacios en blanco. Los ceros van de dos en dos y los unos también. Encontrar la recurrencia que calcula el número de señales que se pueden emitir de longitud n (no olvidar las condiciones iniciales).

$$S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2}$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 3$$

$$S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2}$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 3$$

9. Encuentre una relación de recurrencia para el número de permutaciones de un conjunto de n elementos, y obtenga una fórmula explícita.

10. Sea S_n el número de cadenas de n bits que no contienen el patrón 111. Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para la sucesión $\{S_n\}$.

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$$

$$S_1 = 2$$

$$S_2 = 3$$

$$S_3 = 4$$

$$S_4 = 7$$

$$S_5 = 12$$

$$S_6 = 21$$

$$S_7 = 37$$

$$S_8 = 65$$

$$S_9 = 115$$

$$S_{10} = 201$$

$$S_{11} = 356$$

$$S_{12} = 632$$

$$S_{13} = 1119$$

$$S_{14} = 2007$$

$$S_{15} = 3654$$

$$S_{16} = 6672$$

$$S_{17} = 12240$$

$$S_{18} = 22560$$

$$S_{19} = 41952$$

$$S_{20} = 78080$$

$$S_{21} = 145600$$

$$S_{22} = 273280$$

$$S_{23} = 512000$$

$$S_{24} = 959360$$

$$S_{25} = 1781760$$

$$S_{26} = 3344000$$

$$S_{27} = 6272000$$

$$S_{28} = 11808000$$

$$S_{29} = 22240000$$

$$S_{30} = 42080000$$

$$S_{31} = 79424000$$

$$S_{32} = 149248000$$

$$S_{33} = 281216000$$

$$S_{34} = 530432000$$

$$S_{35} = 1000000000$$

$$S_{36} = 1888000000$$

$$S_{37} = 3550720000$$

$$S_{38} = 6713280000$$

$$S_{39} = 12688000000$$

$$S_{40} = 24121600000$$

$$S_{41} = 45440000000$$

$$S_{42} = 86080000000$$

$$S_{43} = 162496000000$$

$$S_{44} = 308096000000$$

$$S_{45} = 581248000000$$

$$S_{46} = 1096704000000$$

$$S_{47} = 2070400000000$$

$$S_{48} = 3922432000000$$

$$S_{49} = 7412864000000$$

$$S_{50} = 14000000000000$$

$$S_{51} = 26640000000000$$

$$S_{52} = 50400000000000$$

$$S_{53} = 95680000000000$$

$$S_{54} = 181760000000000$$

$$S_{55} = 345280000000000$$

$$S_{56} = 657600000000000$$

$$S_{57} = 1252800000000000$$

$$S_{58} = 2390400000000000$$

$$S_{59} = 4537600000000000$$

$$S_{60} = 8608000000000000$$

$$S_{61} = 16345600000000000$$

$$S_{62} = 31072000000000000$$

$$S_{63} = 59200000000000000$$

$$S_{64} = 111872000000000000$$

$$S_{65} = 213760000000000000$$

$$S_{66} = 408000000000000000$$

$$S_{67} = 777600000000000000$$

$$S_{68} = 1484800000000000000$$

$$S_{69} = 2822400000000000000$$

$$S_{70} = 5376000000000000000$$

$$S_{71} = 10240000000000000000$$

$$S_{72} = 19600000000000000000$$

$$S_{73} = 37376000000000000000$$

$$S_{74} = 71200000000000000000$$

$$S_{75} = 136480000000000000000$$

$$S_{76} = 261760000000000000000$$

$$S_{77} = 500480000000000000000$$

$$S_{78} = 952000000000000000000$$

$$S_{79} = 1812800000000000000000$$

$$S_{80} = 3465600000000000000000$$

$$S_{81} = 6624000000000000000000$$

$$S_{82} = 12640000000000000000000$$

$$S_{83} = 24320000000000000000000$$

$$S_{84} = 46400000000000000000000$$

$$S_{85} = 88480000000000000000000$$

$$S_{86} = 169280000000000000000000$$

$$S_{87} = 324800000000000000000000$$

$$S_{88} = 620800000000000000000000$$

$$S_{89} = 1187200000000000000000000$$

$$S_{90} = 2272000000000000000000000$$

$$S_{91} = 4384000000000000000000000$$

$$S_{92} = 8416000000000000000000000$$

$$S_{93} = 16064000000000000000000000$$

$$S_{94} = 30880000000000000000000000$$

$$S_{95} = 59040000000000000000000000$$

$$S_{96} = 112000000000000000000000000$$

$$S_{97} = 215040000000000000000000000$$

$$S_{98} = 414080000000000000000000000$$

$$S_{99} = 794240000000000000000000000$$

$$S_{100} = 1520000000000000000000000000$$

11. Sea q_n el número de cadenas de n bits que no contienen dos ceros consecutivos. Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para la sucesión $\{q_n\}$, y obtenga una fórmula explícita.

• BOLETÍN 4-1

$$\{3k+1: k \in \mathbb{N}; \quad | \quad 3k+1$$

$$3k+1 \stackrel{2b=k}{\Rightarrow} 6t+1$$

1. Demuestra que todo número primo de la forma $3k+1$ es de la forma $6t+1$.

Proof: Para que $3k+1=6t+1$; $k=2t$. Para que $3k+1$ sea primo, k debe ser par, ya que con k impar, daría un número par, el cual es divisible entre 2, y no sería primo.
Si k es par, $2|k$ y sabemos que t es un número entero. Por tanto se puede expresar de la forma $6t+1$

2. Demuestra que todo número primo mayor o igual a 5 es de la forma $6k+1$ ó $6k-1$. $\Rightarrow 6t+s=6(t+1)-1=6k-1$

3. Demuestra que 3, 5, 7 son los únicos primos triples. (Los únicos tales que p , $p+2$ y $p+4$ son todos primos).

Proof: Sabemos que para $p=3$, $p+2=5$, $p+4=7$ y, por tanto, son primos triples. Consideramos las $p > 3$. Estas pueden ser de la forma $p=3k$

4. Demuestra que en todo triángulo rectángulo cuyos lados son números enteros, al menos uno de ellos debe ser divisible por 3.

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $3|n$, entonces $n=3k$. Si a , b ó h no son divisibles entre 6 es, tendrá la forma $3k+1$ ó $3k+2$. a^2 , b^2 ó h^2
Serían $9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1=3m+1$ con $3k+1$ o
 $9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1=3n+1$ con $3k+2$. Ambas expresiones dan un múltiplo de 3 + 1. Sustituimos en la ec. de pitágoras y nos queda $3p+1=3t+1+3r+1$; $3p+1=3(t+r)+2$; $3k+1=3j+2$
Por tanto, contradicción, por lo que uno al menos debe ser divisible por 3.

5. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Demuestra que a y b no pueden ser ambos impares y que $n = ab$ es múltiplo de 6.

Si a y b son impares, pueden escribirse como $a = 2k + 1$ $b = 2t + 1$ con $k, t \in \mathbb{N}$. Entonces a^2 y b^2 podrán escribirse como $4k^2 + 4k + 1 = 4m + 1$ y $4t^2 + 4t + 1 = 4n + 1$, respectivamente. Por tanto, $c^2 = 4m + 4n + 1$
 $c^2 = 4j + 1$

Si n es múltiplo de 6, hay 3 posibilidades:

a y b pares $\rightarrow$ da n múltiplo si $a=6$ y $b=4$ por ejemplo

a par y b impar (o viceversa) $\rightarrow$ múltiplo si $a=3$ y $b=2$

a impar y b impar $\rightarrow$ imposible, ya que la multiplicación de impares solo da números impares

6. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demuestra que si $a|(b+c)$ y $a|b$, entonces $a|c$.

$a|b+c$ quiere decir que $b+c = a \cdot k$ y $a|b$ que $b = a \cdot t$.
Por tanto $c = a \cdot k - b = a \cdot k - a \cdot t = a \cdot (k - t) = a \cdot m$, lo que quiere decir que $a|c$, como se desea.

7. Sea $a, b \in \mathbb{Z}$. Demuestra que si $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces $\text{mcd}(a+b, a-b) \in \{1, 2\}$.

Llamemos d al $\text{mcd}(a+b, a-b)$. Si d divide a $(a+b)$ y a $(a-b)$, también a sus combinaciones lineales. Por tanto $d|(a+b-a+b) = d|2b$ y $d|(a+b+a-b) = d|2a$. Usando el Teorema de Bezout, sabemos que existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $ax + by = 1$, siendo posible que solo uno de ellos sea 0.

Si multiplicamos por 2, queda $2ax + 2by = 2$. Si $d|2a$ y $d|2b$, entonces también a su comb. lineal. Por tanto, $d|(2ax + 2by)$ y, como consecuencia, $d|2$. Enonces, d es igual a 1 o 2, ya que son los únicos divisores de 2, como se desea.

8. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $\text{mcd}(3k+2, 5k+3) = 1$

Sea $d = \text{mcd}(3k+2, 5k+3)$. Esto quiere decir que $d \mid 3k+2$ y $d \mid 5k+3$. Como d divide a ambos números, también dividirá a su comb. lineal. Si multiplicamos $3k+2$ por 5 y $5k+3$ por 3 y los restamos, da 1. Entonces $d \mid 1$, como se quiere.

9. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que si $\text{mcd}(a, b) = d$, entonces $\text{mcd}(ka, kb) = kd$.

Si $\text{mcd}(a, b) = d$, quiere decir que $d = ax + by$, $\rightarrow x, y \in \mathbb{Z}$ según el 1^{a} de Bézout. Si multiplicamos k en ambos lados, $kd = kax + kby$. Por tanto $\text{mcd}(ka, kb) = kd$

10. Calcula $\text{mcd}(143, 227)$, $\text{mcd}(306, 657)$, $\text{mcd}(272, 1479)$.

$$a = kb + r_1$$

- $\text{mcd}(143, 227)$

$$227 = 1 \cdot 143 + 84$$

$$143 = 1 \cdot 84 + 59$$

$$84 = 1 \cdot 59 + 25$$

$$59 = 2 \cdot 25 + 9$$

$$25 = 2 \cdot 9 + 7$$

$$9 = 1 \cdot 7 + 2$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$1 = 1 \cdot 1 + 0$$

$$\text{mcd}(143, 227) = 1$$

- $\text{mcd}(306, 657)$

$$657 = 2 \cdot 306 + 45$$

$$306 = 6 \cdot 45 + 36$$

$$45 = 1 \cdot 36 + 9$$

$$36 = 4 \cdot 9 + 0$$

$$\text{mcd}(306, 657) = 9$$

- $\text{mcd}(272, 1479)$

$$1479 = 5 \cdot 272 + 119$$

$$272 = 2 \cdot 119 + 34$$

$$119 = 3 \cdot 34 + 17$$

$$34 = 2 \cdot 17 + 0$$

$$\text{mcd}(272, 1479) = 17$$

11. Usa el Algoritmo de Euclides para obtener los valores $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

a) $\text{mcd}(56, 72) = 56x + 72y$.

b) $\text{mcd}(24, 138) = 24x + 138y$.

c) $\text{mcd}(119, 272) = 119x + 272y$.

d) $\text{mcd}(1769, 2378) = 1769x + 2378y$.

a) $\text{mcd}(56, 72) = 56x + 72y$

$$72 = 1 \cdot 56 + 16$$

$$56 = 3 \cdot 16 + 8$$

$$16 = 2 \cdot 8 + 0$$

$$\text{mcd}(56, 72) = 8$$

$$8 = 56 - 16 \cdot 3$$

$$16 = 72 - 56$$

$$\begin{aligned} 8 &= 56 - 3 \cdot (72 - 56) \\ 8 &= 4 \cdot 56 - 3 \cdot 72 \end{aligned}$$

$$x = 4 \quad y = -3$$

b) $\text{mcd}(24, 138) = 24x + 138y$

$$138 = 5 \cdot 24 + 18$$

$$24 = 18 + 6$$

$$18 = 6 \cdot 3 + 0$$

$$\text{mcd}(24, 138) = 6$$

$$6 = 24 - 18$$

$$18 = 138 - 5 \cdot 24$$

$$\begin{aligned} 6 &= 24 - 138 + 5 \cdot 24 \\ 6 &= 6 \cdot (24) - 138 \end{aligned}$$

$$x = 6 \quad y = -1$$

c) $\text{mcd}(119, 272) = 119x + 272y$

$$272 = 2 \cdot 119 + 34$$

$$119 = 3 \cdot 34 + 17$$

$$34 = 2 \cdot 17 + 0$$

$$\text{mcd}(119, 272) = 17$$

$$17 = 119 - 3 \cdot 34$$

$$34 = 272 - 2 \cdot 119$$

$$\begin{aligned} 17 &= 119 - 3 \cdot (272 - 2 \cdot 119) \\ 17 &= 7 \cdot 119 - 3 \cdot 272 \end{aligned}$$

$$x = 7 \quad y = -3$$

12. El *mínimo común múltiplo* de dos enteros a y b ($ab \neq 0$), denotado por $mcm(a, b)$, se define como el menor entero positivo que es divisible por a y por b . Demuestra que $mcd(a, b)mcm(a, b) = ab$.